

## Didaktischer Kommentar

### Motivation für den Lernpfad Funktionen

In den Schulstufen 8 und 9 haben die Schüler mit funktionalen Zusammenhängen bereits in vielfacher Weise gearbeitet. In der 10. Jahrgangsstufe werden neue Funktionstypen kennengelernt: Potenzfunktionen, Polynomfunktionen, exponentielle und trigonometrische Funktionen. Potenzfunktionen sind ein zentrales Thema dieser Jahrgangsstufe und ordnen sich in einen systematischen Aufbau wichtiger Funktionstypen ein.

Der Lernpfad ist in einem Wiki realisiert. Dadurch sind individuelle Veränderungen und Um diesen Lernpfad einsetzen zu können, sind grundlegende Kenntnisse im Umgang mit den elementaren Potenzfunktionen notwendig. Der Lernpfad dient der Vertiefung des Arbeitens mit Potenzfunktionen und deren Graphen. Es wird also vorausgesetzt, dass bereits ein inhaltliches Begriffsverständnis der Grundfunktionen entwickelt ist.

- Zum einen erfolgt die Entwicklung des Verständnisses der Veränderung der Graphen beim Variieren des Exponenten bei den Grundfunktionen. Das Verändern mit Hilfe eines Schiebereglers erlaubt das dynamische Erleben der Veränderung des Graphen der jeweils betrachteten Funktion. Durch das Arbeiten mit interaktiven Tools und das dabei erforderliche Variieren der Parameter des Funktionsterms steht hier sicher das **Operieren und Interpretieren** im Vordergrund.
- Durch das zusätzliche Einfügen von Streck- und Schiebeparameter kann die hoffentlich vorhandene Erwartungshaltung der Lernenden im Hinblick auf die Veränderung der Graphen unmittelbar durch die Applets überprüft und das erlernte Wissen über die Grundfunktionen auf weitere Funktionen dieser Typen **transferiert** werden.
- Die Schüler/innen werden nach den einzelnen Kapiteln immer wieder aufgefordert, die erarbeiteten Inhalte mit eigenen Worten in kurzen Zügen zusammenzufassen, wodurch eine **Dokumentation** des Lernprozesses sowie der Inhalte gewährleistet wird.
- Als Lernmethode können die Schüler/innen nach eigenem Erarbeiten ihr Wissen in kleinen Gruppen oder auch im Klassenplenum in Form von Kurzreferaten wiedergeben und somit ihr erlerntes Wissen zu **argumentieren und kommunizieren**.

### Kurzinformation

In der 10. Jahrgangsstufe wird das funktionale Begriffsverständnis durch das Kennenlernen neuer Funktionstypen weiterentwickelt. Ein wichtiger neuer Typ sind elementare Potenzfunktionen:  $x \rightarrow x^r, r \in \mathbb{R}$ .

Von diesem Typ haben Schülerinnen und Schüler bereits proportionale, indirekt proportionale und rein quadratische Funktionen kennengelernt. In diesem Lernpfad werden

- die vier – hier so genannten – Grundfunktionen mit
$$f(x) = x^n, f(x) = x^{-n}, f(x) = x^{\frac{1}{n}}, f(x) = x^{-\frac{1}{n}}$$
- und die Funktionen mit  $g(x) = a \cdot f(x) + c$  mit  $a, c \in \mathbb{R}$  behandelt.

Bei der Variablen  $a$  sprechen wir von einem Streckparameter, die Variable  $c$  heißt Verschiebungsparameter.

Die Eigenschaften dieser Funktionen werden durch das Arbeiten mit Funktionstermen und Graphen erschlossen. Der Computer – hier das Programm Geogebra – unterstützt die Entwicklung des Begriffsverständnisses durch die Visualisierung der Auswirkungen von Parameterveränderungen auf die Graphen der Funktionen.

Auf die Behandlung Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten – also

$$f(x) = x^{\frac{p}{q}} \text{ mit } p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

reellen Exponenten sowie von ganz und gebrochen rationalen Funktionen wird in diesem Lernpfad verzichtet, da diese den Umfang dieser Unterrichtssequenz überstiegen hätte. Die Behandlung dieser Funktionstypen kann sich an diesen Lernpfad anschließen.

Das zentrale Ziel dieser Unterrichtssequenz ist es, das Verständnis der Potenzfunktionen zu verbessern. Teilziele sind:

- Kenntnis der Eigenschaften der Funktionen und insbesondere der Graphen in Abhängigkeit vom Exponenten;
- Fähigkeit, die Veränderung der Graphen bei der Variation von Parametern beschreiben zu können;
- Fähigkeit, den Einfluss von Streck- und Schiebeparametern auf die Veränderung der Graphen beschreiben zu können;

Dieser Lernpfad ist als eine Vertiefung dieses Themenbereichs gedacht, es werden also grundlegende Kenntnisse über die elementaren Potenzfunktionen bzw. Grundfunktionen und die allgemeine Potenzfunktion vorausgesetzt. Aufgrund der Komplexität wird auf das Einbeziehen reeller Exponenten verzichtet.

Der Begriff „Kenntnisse“ bezieht sich dabei auf Form und Eigenschaften der Graphen, den Definitionsbereich und den Bezug der Potenzfunktionen zu proportionaler und quadratischer Funktion sowie der Wurzelfunktion.

In dem Lernpfad werden die Eigenschaften der Grundfunktionen in einem Zwei-Schritt-Verfahren wiederholt.

- Bei den vier Grundfunktionen werden die Auswirkungen der Variation des Exponenten auf die Graphen untersucht.
- Es werden die durch Streck- und Schiebeparameter erweiterten Potenzfunktionen analysiert

Der Lernpfad ist nach einem Stufenschema aufgebaut:

**Vorstufe:** (Anknüpfen an das Vorwissen) Beziehung der Funktion mit  $f(x) = x^3$  zu den proportionalen und rein quadratischen Funktionen und Auswirkungen der Parametervariation bei der Funktion mit  $g(x) = a \cdot x^3 + c$  auf den Graphen der Funktion  $g$ .

**1. Stufe:** Erweiterung der Funktion mit  $x \rightarrow x^n, n \in \mathbb{N}$  und Untersuchung der Auswirkung der Variation des Exponenten  $n$  auf die Graphen der Funktionen. Dann werden die Funktionen  $g(x) = a \cdot f(x) + c$  mit  $a, c \in \mathbb{R}$  und die zugehörigen Graphen analysiert.

2. Stufe: Es werden die Funktion mit  $x \rightarrow x^n, n \in \mathbb{N}$  und deren Eigenschaften untersucht.

Wiederum werden die Auswirkung der Variation des Exponenten  $n$  auf die Graphen der Funktionen und dann die der Funktionen  $g(x) = a \cdot f(x) + c$  mit  $a, c \in \mathbb{R}$  mit entsprechenden Variationen der Parameter analysiert.

3. Stufe: Analog zu Stufe 1 und 2 werden die Funktionen mit  $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  untersucht.

4. Stufe: Die Überlegung der Stufen 1 - 3 werden auf die Funktionen mit  $f(x) = x^{-\frac{1}{n}}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  übertragen.

5. Test: Es wird ein Test bezüglich des gelernten Wissens durchgeführt.

Kurzinformation	
Schulstufe	10. Schulstufe
Dauer	3 Stunden
Unterrichtsfächer	Mathematik
Verwendete Medien	Dynamische Geometrie Software (DGS), Internet
Technische Voraussetzungen	Java, Internet
Autoren	Hans-Georg Weigand, Petra Bader, Michael Schuster, Jan Wörler

## Voraussetzungen

Technische Voraussetzungen: In dem vorliegenden Lernpfad wird durch den Einsatz der Software GeoGebra und von interaktiven Internetseiten das selbsttätige Lernen der Schüler/innen gefördert. Die Schüler arbeiten bei diesem Lernpfad allerdings nicht nur am Arbeitsblättern festhalten. Die Schüler haben bei komplexeren Aufgaben die Möglichkeit, auf Hilfestellungen zurückzugreifen und ihre Ergebnisse mit einer Lösung zu vergleichen.

Vorwissen der SchülerInnen: Kenntnis der Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten und ihrer Eigenschaften. Die Schülerinnen und Schüler sind mit den grundlegenden Eigenschaften der Potenzfunktionen und ihrer Graphen vertraut. Dieser Lernpfad ist zum Einsatz in der Vertiefungsphase beim Lernen des Begriffs der Potenzfunktion gedacht.

## Lerninhalte und Lernziele

Lerninhalt	Lernziel
Variation der Parameter bei den Funktionsscharen $f_{a,c}(x) = a \cdot x^3 + c$	Verständnis von Parametervariationen auf die Eigenschaften des Graphen
Variation der Parameter bei Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten	Verständnis der Potenzfunktionen mit natürlichen Exponenten und ihrer Graphen
Variation der Parameter bei Potenzfunktionen mit ganzen Exponenten und Stammbrüchen als Exponenten	Verständnis für die sukzessive Erweiterung auf Potenzfunktionen mit (speziellen) rationalen Exponenten und Kennenlernen der entsprechenden Graphen.

## **Didaktischer Hintergrund**

### **Genderaspekte**

Von Beginn an wurde in diesem Lernpfad darauf geachtet, dass die gewählten Beispiele Mädchen und Burschen gleichermaßen ansprechen. Während des Lernpfads werden rein mathematische Inhalte durch interaktive Übungen erarbeitet, die durch den hohen Experimentieranteil sowohl Mädchen als auch Burschen animieren sollen. Durch das Zusammenspiel von Bildbeispielen und Interaktivität wurden die abstrakten Modelle alltagsverständlich heruntergebrochen.

Durch die vorgeschlagene Lernmethode des individuellen Arbeitens bzw. der Partnerarbeit mit anschließender Präsentation der Ergebnisse werden unterschiedliche Lernprozesse ermöglicht, wie zum Beispiel kooperatives und integratives Lernen, welche beide Geschlechter gleichermaßen ansprechen.

### **Kompetenzen:**

#### **Modellieren:**

Funktionen als Modelle zur Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Größen verstehen und interpretieren

Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen

#### **Transferieren**

Probleme aus verschiedenen Anwendungsbereichen in Form einer Gleichung darstellen, diese lösen und das Ergebnis in Bezug auf die Problemstellung interpretieren

Zwischen tabellarischen und grafischen Darstellungen von Zusammenhängen dieser Art wechseln können

Aus Tabellen, Graphen und Gleichungen von Funktionen Werte(paare) ermitteln und im Kontext deuten können

#### **Interpretieren**

Funktionen als Modelle zur Beschreibung der Abhängigkeit zwischen Größen verstehen und interpretieren

Potenzgesetze mit ganzzahligen und mit rationalen Exponenten verstehen, sie begründen und durch Beispiele veranschaulichen und anwenden

Verbal, tabellarisch, grafisch oder durch eine Gleichung (Formel) gegebene Zusammenhänge dieser Art als entsprechende Potenzfunktionen erkennen bzw. betrachten können; zwischen diesen Darstellungsformen wechseln können

Den Einfluss verschiedener Parameter der Potenzfunktionen auf die Funktionsverläufe der von angeführten Funktionstypen verstehen, interpretieren und deuten

Einfache Terme und Formeln aufstellen, umformen und im Kontext deuten können

## **Operieren:**

Potenz- und Wurzelschreibweise ineinander überführen

Probleme aus verschiedenen Anwendungsbereichen in Form einer Gleichung darstellen, diese lösen und das Ergebnis in Bezug auf die Problemstellung interpretieren

Eigenschaften von Funktionen erkennen, benennen, im Kontext deuten und zum Erstellen von Funktionsgraphen einsetzen können: Monotonie, Monotoniewechsel, asymptotisches Verhalten, Schnittpunkte mit den Achsen

## **Argumentieren:**

Für gegebene Zusammenhänge entscheiden können, ob man sie als Funktionen betrachten kann

Einen Überblick über die wichtigsten (unten angeführten) Typen mathematischer Funktionen geben, ihre Eigenschaften vergleichen können

## **Unterrichtsorganisation – Arbeitsanweisungen für Schüler/innen**

### **Individuelles Arbeiten**

Durch den linearen Aufbau dieses Lernpfades bietet sich in überwiegendem Ausmaß die individuelle Erarbeitung der Lerninhalte an. Durch den Lehrer wird diese laufend betreut, die SchülerInnen müssen ihr erworbenes Wissen in einer Mitschrift dokumentieren.

### **Partnerarbeit:**

Die Schülerinnen und Schüler arbeiten in Partnerarbeit am Computer. Aufgabe der LehrerIn ist es, die individuelle Arbeit der SchülerInnen zu betreuen, Fragen zu beantworten, in ihrer Lösungsfindung zu unterstützen und an entscheidenden Stellen des Lernpfades, die Erkenntnisse der Schüler im Klassenplenum zu präsentieren bzw. von einzelnen Schülern darbieten zu lassen.

## **Leistungsfeststellung/Leistungsbeurteilung**

In die einzelnen Seiten des Lernpfades sind interaktive Übungen und Aufgabenstellungen zur Selbstkontrolle der Schüler eingebunden. Die auf Arbeitsblättern festgehaltenen Ergebnisse ermöglichen es der Lehrkraft, die Leistungen der Schülerinnen und Schüler zu überprüfen. Eine Evaluation des im Rahmen dieses Lernpfades erworbenen Begriffsverständnisses erfolgt über einen Online-Test am Ende des Lernpfades.

## **Anleitungen für Lehrer/innen**

Die Schülerinnen und Schüler sollten den Lernpfad selbstständig durcharbeiten. Sie müssen insbesondere dazu angehalten werden, die Arbeitsblätter an den vorgesehenen Stellen zu bearbeiten. Es ist sinnvoll nach wesentlichen Erarbeitungsschritten die individuelle Arbeit der Schüler zu unterbrechen und die entscheidenden

Erkenntnisse im Klassenplenum von einem Schüler (am Beamer) präsentieren zu lassen.

### **Weitere Materialien**

Siehe [www.mathematik-digital.de](http://www.mathematik-digital.de)

Ergebnisse der internen Evaluation

Fragestellungen zum didaktischen/methodischen Kommentar:

Schwerpunktsetzungen durch die Lehrer/innen möglich.

Fragestellungen zum Lernpfad

Im Lernpfad gibt es heuristisch-experimentelle Phasen in denen die Schüler/innen Experimentieren und Vermutungen aufstellen. Durch Diskussionen werden Begründungen gesucht, die zu einer Exaktifizierung der Begriffe führen. In dieser Phase werden die Schüler/innen dazu aufgefordert auf ihr Vorwissen – evtl. unter Zuhilfenahme des Schulbuchs – zurückzugreifen.

### **Festigung des Wissens – Wissensüberprüfung**

Es gibt viele Angebote für die Schüler/innen das neu erworbene Wissen selbst zu überprüfen. Am Ende des Lernpfades erfolgt ein Verständnistest.

Überblick über den Erstellungsprozess

Die Idee der Parametervariation und das Betrachten der Auswirkungen auf die Graphen lagen von Anfang an nahe. Die Diskussion in der Gruppe ging dann um den systematischen Aufbau des Lernpfades. Die grundlegende Idee ist die Untergliederung der Einheit in das Arbeiten mit (den vier) Grundfunktionen, der allgemeine Potenzfunktion und dem jeweiligen „Hinzufügen“ der Streckungs- und Verschiebungsparameter. Nach dieser Idee wurden die Geogebra-Applets konstruiert. Hierzu waren im Vorfeld zwei „Live-Treffen“ notwendig.